Research Memorandum

フラクタルブラウン運動による
信用リスク評価モデルの実証分析
Credit Risk Evaluation
with Fractional Brownian Motion

FTRI-RM10

April 2013

森田和樹　笹岡洋平　大城直人

要旨/Abstract

このペーパーでは、通常のブラウン運動を拡張したフラクタルブラウン運動を利用したオプションアプローチで信用リスクを評価した結果を報告する。本邦上場企業を対象にした分析の結果、通常のオプションアプローチによる評価結果と比較して、フラクタルブラウン運動を利用したモデルの評価結果の方が倒産の捕捉力が改善されることを示しており、株価変動の情報やハースト指数は信用力をより適切に評価するために有用な情報となることを確認した。

株式会社　金融工学研究所

〒103－0027 東京都中央区日本橋 1-4-1 日本橋一丁目ビルディング

http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439

＊ 本レポートの作成にあたって、研究員からのコメントを参考にした。ただし、本レポートにおける意見は、筆者ら個人によるものであり、金融工学研究所の見解を示すものではない。また、誤植等の誤りは筆者ら個人に属する。

1. Intoroduction

2007 年 3 月期から導入された国際決済銀行（BIS）による新たな自己資本規制の枠組みの導入を契機に、企業の信用力評価モデルに対する注目が高まっており、現在では多くの金融機関で導入が進んでいる。取引先の信用力をいかに精度よく評価することができるかが、金融機関が準備すべき自己資本の金額に直接的に影響することから、信用力評価モデルだけではなく、内部格付体系全般を高度化する作業が続いている。

企業の信用力評価モデルは、財務データを活用したロジットモデルなどに代表される統計モデルを利用する方法と、株価に含まれる情報を利用するオプションアプローチ（いわゆる、マートンモデル）の二通りの手法に分類することができる。本ペーパーでは、オプションアプローチの枠組みを拡張した新たなモデルを検討する。具体的には、標準的なオプションアプローチが幾何ブラウン運動を仮定したモデルであることに対して、本研究ではフラクタルブラウン運動を前提にオプションアプローチの枠組みを拡張する方法を検討する。

フラクタルの概念は当初 Mandelbrot によって導入された。今日では、様々な自然現象や経済現象にフラクタルが観測されている。Mandelbrot は株価の変動がフラクタルの性質を持つことを最初に示している。その後様々な研究者により、株価のみならず為替等の価格変動がフラクタルの特徴を有することを示しており、実証研究のみならず、昨今ではシミュレーションによる価格変動の分析なども盛んに取り組まれている。本研究では、このような特徴的な株価変動をモデルに取り込むことでより精度の高い信用力評価モデルが構築できることを示す。その上で日本の上場企業を対象に倒産確率の推計を行い、標準的なオプションアプローチによる結果との比較検討を行う。

2. Fractional Option Approach

2.1 Fractional Brownian Motion[1]

フラクタルブラウン運動 $B_H(t)$ は自己アフィン過程として知られており、当初 Mandelbrot and Van Ness (1968)にて導入された。その特徴的な性質として、$^{\forall}\alpha > 0$ に対して、$B_H(\alpha t) = \alpha^H B_H(t)$ となる関係がある。ここで H はハースト指数(Hurst's exponent)として知られているパラメータであり [2]、$0 < H < 1$ である。このパラメータは当初 Hurst(1951)が、ナイル川の水位変動を特徴づけるために導入したものである。通常のブラウン運動 $B(t)$ の場合、その分散は時間間隔に比例し、以下の通り記述される。

$$E\left[\left| B(t_1) - B(t_2) \right|^2\right] \propto \left| t_1 - t_2 \right| \tag{1}$$

一方、フラクタルブラウン運動 $B_H(t)$ はこの関係式を一般化したものであり、以下の通りその分散が時間間隔の $2H$ 乗に比例する関係を持つ。

$$E\left[\left| B_H(t_1) - B_H(t_2) \right|^2\right] \propto \left| t_1 - t_2 \right|^{2H}$$

[1] このセクションの記述に関しては、熊谷(2002)を参考とした。
[2] フラクタルな性質を特徴づけるパラメータは他にも多数ある。

株式会社 金融工学研究所 http://www.ftri.co.jp/ TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

ハースト指数$0 < H < 1$の実数に対して、フラクタルブラウン運動は以下の通り定義される（Mandelbrot and Van Ness , 1968）。

$$B_H(t) - B_H(0) \equiv \frac{1}{\Gamma(H+0.5)} \int_{-\infty}^{t} K(t-t')dB(t') \tag{2}$$

ここで、$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数である。また、

$$K(t-t') \equiv \begin{cases} (t-t')^{H-0.5}, & if\, 0 \le t' \le t \\ (t-t')^{H-0.5} - (-t')^{H-0.5}, & if \quad t' \le 0 \end{cases}$$

である。

ハースト指数がHであるフラクタルブラウン運動は連続ガウス過程$\{B_H(t), t \in \Re\}$に従い、平均が$E[B_H(t)] = 0$であり、共分散Cov_Hが以下の式で与えられる；

$$Cov_H(t,s) = E[B_H(t)B_H(s)] = 1/2\left\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right\} \tag{3}$$

もし、$H = 0.5$であれば、フラクタルブラウン運動$B_H(t)$は通常のブラウン運動$B(t)$と一致する。また、$t = 0$を中心とした過去の変位$B_H(-t)$と未来の変位$B_H(t)$の相関係数$Corr_H(-t,t)$を以下の通り定義する[3]。

$$Corr_H(-t,t) \equiv \frac{E[(B_H(0) - B_H(-t))(B_H(t) - B_H(0))]}{E[B_H(t)^2]} \tag{4}$$

一般性を失わずに$B_H(0) = 0$とすると、(4)式は以下の通りとなる。

$$Corr_H(-t,t) = 2(2^{2H-1} - 1) \tag{5}$$

$H = 0.5$の場合フラクタルブラウン運動は通常のブラウン運動と等しく$Corr_H = 0$であり自己相関はない。$0.5 < H < 1$では$Corr_H > 0$となり、フラクタルブラウン運動は持続性（persistent：長期の記憶効果）を示す。すなわち、その変動は緩やかであり同方向に動く傾向が強まる。一方、$0 < H < 0.5$の場合は$Corr_H < 0$となり、反持続性（antipersistent）を示す。すなわち、逆向きに変化する（激しく変化する）傾向が強まる。

2.1 Fractional Geometric Brownian motion

フラクタル幾何ブラウン運動を次のように定義する。

$$dV(t)/V(t) = \mu_V dt + \sigma_V dB_H(t) \tag{6}$$

ここで、μ_Vとσ_Vは定数であり、B_Hはハースト指数Hのフラクタルブラウン運動である。フラクタル幾何ブラウン運動(6)式の解は以下の通り与えられる[4]。

$$V(t) = V_0 \exp\left(\sigma_V B_H(t) + \mu_V t - 1/2\sigma_V^2 t^{2H}\right) \tag{7}$$

なお$H = 1/2$の場合は、$V(t) = V_0 \exp\left(\sigma_V B(t) + \mu t - 1/2\sigma_V^2 t\right)$となり通常のブラウン運動の解と一致することがわかる。

---

[3] 熊谷、「金融時系列データのフラクタル分析」、多賀出版（2002）
[4] Hu and Oksendal(2003)参照

株式会社 金融工学研究所 http://www.ftri.co.jp/ TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

2.2 Probability of Default under Fractional Brownian Motion

時点tでの資産価値$V(t)$は、(6)式で定義されるフラクタル幾何ブラウン運動に従うと仮定する。このとき、負債の満期時点Tにおける資産価値$V(T)$が負債価値$D(T)$を下回った時にその企業が倒産した状態と仮定すると、倒産確率$\Pr(V(T)<D(T)\,|\,V(t))$はHu and Oksendal (2003)及びNecula (2002)の結果を利用すると以下の通り与えられる。

$$\Pr[V(T)<D(T)\,|\,V(t)]=\int_{-\infty}^{d_2^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(T^{2H}-t^{2H}\right)}}\exp\left(-\frac{(x-B_H(t))^2}{2\left(T^{2H}-t^{2H}\right)}\right)dx \tag{8}$$

ここで、$d^*{}_2=\dfrac{\ln(D(T)/V(t))-\mu_V T+1/2\sigma_V^2T^{2H}}{\sigma_V}$ である。

$Z=\dfrac{x-B_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}$ とおいて、(8)式を展開すると、

$$\begin{aligned}\Pr[V(T)<D(T)\,|\,V(t)]&=\int_{-\infty}^{\frac{d_2^*-B_H(t)}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)dZ\\&=\int_{\frac{B_H(t)-d_2^*}{\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)dZ\end{aligned} \tag{9}$$

(7)式の両辺の自然対数をとったものを(9)式に代入すると以下の結果が得られる。

$$\Pr[V(T)<D(T)\,|\,V(t)]=\int_{d_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)dZ=1-N(d_2) \tag{10}$$

ただし、$d_2=\dfrac{\ln(V(t)/D(T))+\mu_V(T-t)-1/2\sigma_V^2(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}}$ (11)

ここで、$N(\cdot)$は標準正規累積分布関数を表す。

なお、(10)の関係式は、$H=1/2$とすれば、通常の幾何ブラウン運動を仮定した場合の解に収束することがわかる[5]。

2.3 Estimation of Parameters

ここで、(10)式の倒産確率を計算するために必要なパラメータは、時点tでの資産価値$V(t)$、資産価値のボラティリティーσ_V、資産価値のトレンドμ_V、負債価値$D(T)$、将来時点T、ハースト指数Hである。

(1)　資産価値$V(t)$の推計

時点tでの資産価値$V(t)$を計算するにあたり、これは企業の負債価値$D(t)$と資本価値$E(t)$の合計と等しいと仮定する。すなわち、$V(t)=D(t)+E(t)$とする。また一般のMertonモデル（Merton, 1974）の枠組みに従い、資本価値$E(t)$は資産価値$V(t)$上のコールオプションの価値に等しいと仮定する。このとき、Hu and Oksendal (2003)及びNecula (2002)の結果を利用すると資本価値$E(t)$は、リスクフリーレートをrとして、

[5] 一般的なオプションモデルの解法や特徴に関しては、大城・猿渡(2006)，等参照。

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

$0.5 < H < 1$に対して[6]、以下の通り計算することが可能である。

$$E(t) = V(t)N(d^m{}_1) - D(T)e^{-r(T-t)}N(d^m{}_2) \tag{12}$$

$$d^m{}_1 = \frac{\ln(V(t)/D(T)) + r(T-t) + 1/2\sigma_V^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

$$d^m{}_2 = \frac{\ln(V(t)/D(T)) + r(T-t) - 1/2\sigma_V^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma_V\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}}$$

(12)式を計算する上で資産価値のボラティリティーσ_V、負債価値$D(T)$、満期時点T、ハースト指数Hに加えて、資本価値$E(t)$が必要となる。

(2)　企業の資本価値$E(t)$の推計

時点tでの資本価値$E(t)$は株式時価総額と等しいと仮定し、$E(t)$は「時点tにおける発行済み株式数×株価」で推計する。

(3)　企業の負債価値$D(T)$の推計

企業の負債価値$D(T)$は、将来時点T（$0 \le t < T$）における負債価値の情報である。しかしながら、将来時点の企業の借り入れや返済行動を現時点で評価することはできないため、$D(T)$の推計は通常困難である。このため、通常のオプションアプローチの解法における手法にならい[7]、評価時点tでの負債総額Kを負債の満期時点での負債価値$D(T)$と同一（$D(T) = K$）と見なすこととする。

(4)　将来時点T

オプションアプローチを取り扱った先行研究の多くでは、満期までの期間を１年とすることが多い。本研究において$T - t = 1$とすると、(10)式の倒産確率は通常のオプションモデルにおける解と一致するため、(10)式の結果と通常のオプションアプローチによる結果の比較評価が困難になる。そこで、Tを変化させた場合の影響を評価するが、個社の倒産確率を計算する際には、$T - t = 2$とする。１年未満（$T - t < 1$）として評価する方法も考えられるが、実務的には直近の評価精度よりも、より遠い将来の予測精度の評価を取り扱う方が望ましいため、本研究では、$T - t = 2$として評価を行うこととした。

(5)　資産価値のボラティリティーσ_Vの推計

資産価値のボラティリティーσ_Vに適当な初期値$\tilde{\sigma}_V$を仮定して、(12)式を解くことで時点tにおける資産価値$\tilde{V}_t$を求める。次にM日間の資産価値$\tilde{V}_t$の変化を求め、それらの軌跡から資産価値のボラティリティーの推定値$\hat{\sigma}_V$を計算する。

$$\hat{\sigma}_V^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{t=1}^{M}(\tilde{V}_t - \bar{V})^2 \tag{13}$$

ここで、$\bar{V}$は資産価値V_tの平均値である。初期値と推定値の誤差が一定値ε以下となるまで（$|\hat{\sigma}_V - \tilde{\sigma}_V| < \varepsilon$）、推定値を新たな初期値として計算を繰り返す。この結果を資産価値のボラティリティー$\sigma_V = \hat{\sigma}_V$とする。

6　ハースト指数H<0.5 では解析解は明示されていない。

7　Oshiro and Saruwatari(2006)参照。

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

2.4 Estimation of Hurst Exponent

本モデルでは(6)式において資産価値$V(t)$がフラクタル幾何ブラウン運動であることを仮定している。ところが資産価値$V(t)$は直接推計できないため、その推移からハースト指数を直接求めることは困難である。しかしながら2.3節にて定義したとおり、本ペーパーでは、負債の満期時点での価値は評価時点tでの負債総額$K(t)$と同一、すなわち負債の価値は評価期間中変動しない（定数）と仮定しているため、資産価値＝資本価値＋定数で表すことができる。従って、資産価値$V(t)$が従う拡散過程の特徴は資本価値$E(t)$が従う拡散過程、すなわちハースト指数がHであるフラクタル幾何ブラウン運動のそれと一致することになる。したがい、ここでは株価推移の時系列データからハースト指数を推計したものを資産価値のハースト指数として利用することとする。

ハースト指数の推計方法には、先行研究において最も参照されることが多いと考えられるHurst(1951)による標準的な推計方法を利用する[8]。

株価リターンの時系列データをp_i（$1 \le i \le N$）とし、時系列データを長さτの$\lfloor N/\tau \rfloor$個の期間に分割する。ここで、$\lfloor \cdot \rfloor$は切り下げ関数を表す。j番目の期間内におけるp_iの平均値μ_jは以下の通り表される[9]。

$$\mu_j \equiv \frac{1}{\tau}\sum_{i=j\tau+1}^{(j+1)\tau} p_i$$

平均からの偏差の累積$P(t,\tau)$は、

$$P(t,\tau) \equiv \sum_{i=j\tau+1}^{j\tau+t}(p_i - \mu_j),\ \ 1 \le t \le \tau$$

と表される。この$P(t,\tau)$の期間内における最大値と最小値の差をレンジRとする。

$$R \equiv \max_{1\le t\le\tau} P(t,\tau) - \min_{1\le t\le\tau} P(t,\tau)$$

このレンジを期間内の標準偏差

$$S \equiv S(t,\tau) = \left\{\sum_{i=j\tau+1}^{(j+1)\tau}(p_i - \mu_j)^2\right\}^{1/2}$$

で除したR/Sはハースト指数Hに対して、

$$R/S \propto (\tau/2)^H$$

の関係が成立することが知られている。

本ペーパーでは、株価の時系列データを用い、様々な期間τに対してR/S値を計算し、最小二乗法により

$$\log(R/S) = H\log(\tau) + c \qquad (14)$$

の関係で回帰して得られた傾きHをハースト指数として利用する。ここでcは定数項を表す。

[8] 一般的にR/S解析と呼ばれているが、その他の推計方法も多数提案されている、例えば、修正R/S解析(Lo, 1991)やDetrended Fluctuation Analysis(DFA) (Ausloos, 2000)、Average Wavelet Coefficient Method (Percival and Walden, 2000)等がある。

[9] 熊谷(2002)を参照

株式会社 金融工学研究所 http://www.ftri.co.jp/ TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

3. Basic Analysis

本章では実際のデータを用いた実証分析を行う前に、(10)式により得られる結果の特徴を明らかにする。具体的には、(10)式から得られる倒産確率をハースト指数H、資産負債比率V/D、評価時点（タイムホライズン）T、リスクフリーレートrとボラティリティーσ_Vのそれぞれを変化させた場合の倒産確率への影響を検討する。

図１は$r=0.03$、$\sigma_V=0.1$、$T=2$とした場合の、ハースト指数と資産負債比率V/Dを変化させた場合のデフォルト確率の推移を示している。ハースト指数が大きくなるほどデフォルト確率が高くなる様子がうかがえる。ただし、V/Dが低い（デフォルト確率が高い）部分ではハースト指数が高くなるほどデフォルト確率が下がることがわかる。

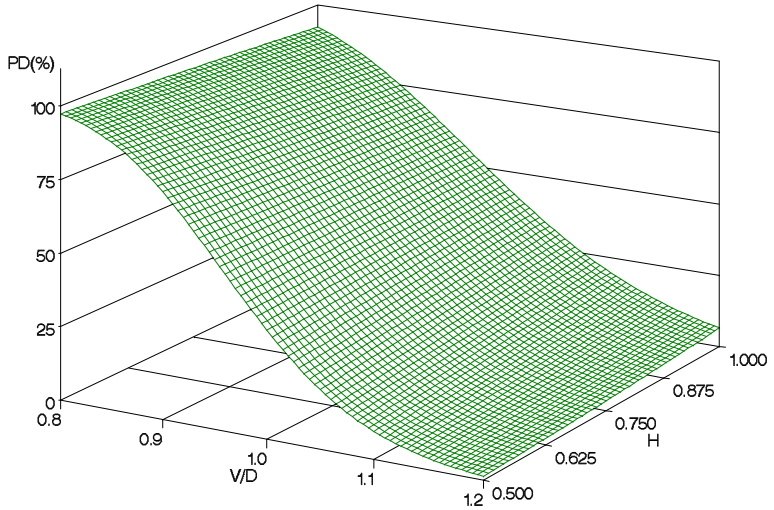

図1　デフォルト確率のハースト指数と資産負債比率との依存関係

図２は資産負債比率V/Dを 1.1 とした場合の、ハースト指数と評価時点Tを変化させた場合の倒産確率の推移を示す。ハースト指数が比較的高い部分では評価時点Tが大きくなるほど倒産確率が高くなるが、ハースト指数が小さくなるにつれて評価時点Tが大きくなっても増加が少なくなることがわかる。

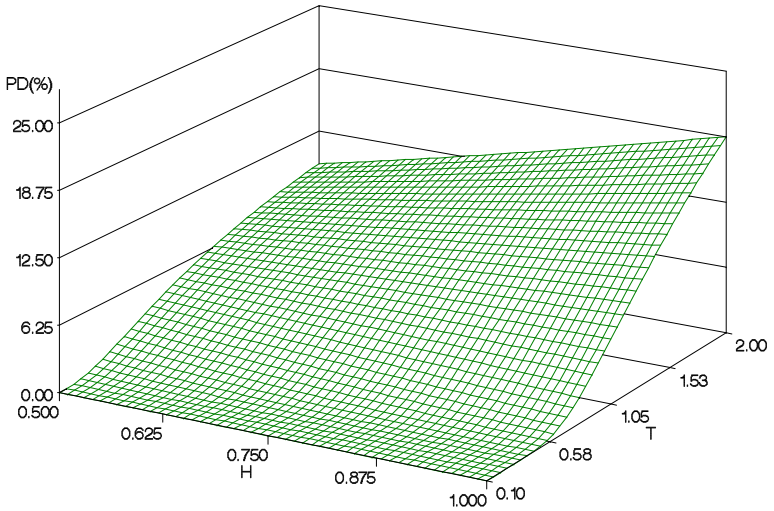

図2　デフォルト確率のハースト指数と評価時点との依存関係

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

図３は資産負債比率$V/D=1.1$、$\sigma_V=0.1$とした場合に$H=0.5$、$H=0.7$、$H=0.9$の３つのケースにおいて評価時点Tを変化させた場合のリスクフリーレートrによる倒産確率の推移を示したものである。リスクフリーレートrが小さくなる程ハースト指数の差異による倒産確率への影響は小さくなる。

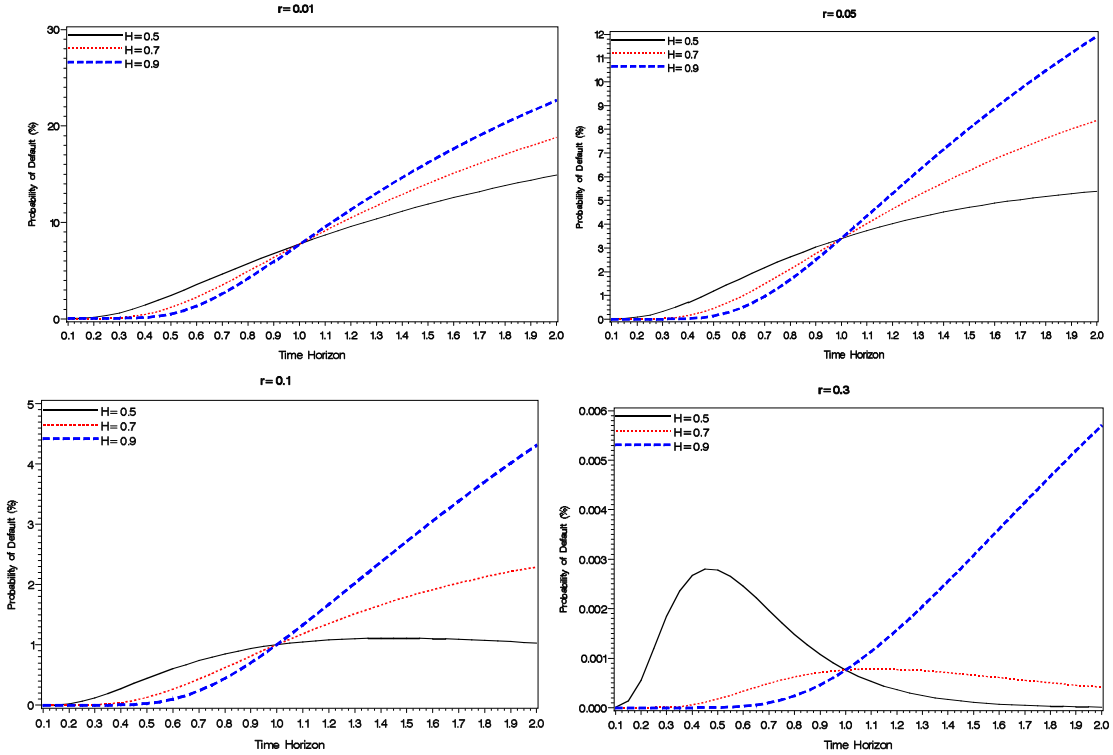

図3　デフォルト確率のハースト指数とリスクフリーレートとの依存関係

図４は資産負債比率$V/D=1.1$、$r=0.03$、$H=0.9$とした場合に、評価時点Tを変化させた場合の資産のボラティリティーσ_Vによる倒産確率の推移を示す。

資産のボラティリティーが小さくなるほど倒産確率が低くなる様子がわかる。これは、通常のオプションアプローチによる結果と整合的な関係である。

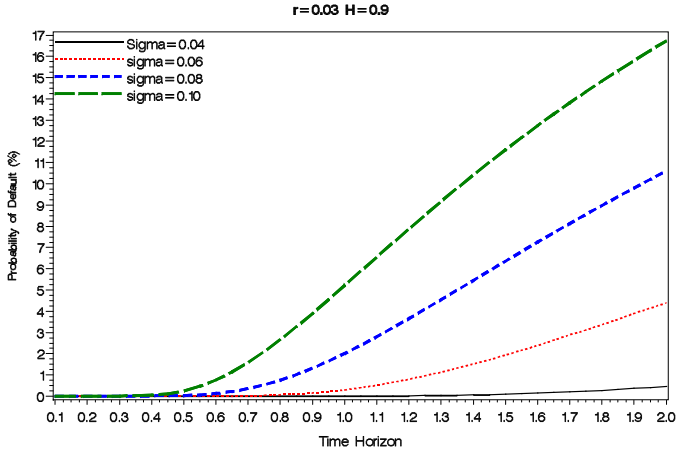

図4　デフォルト確率のハースト指数と資産のボラティリティーとの依存関係

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

4. Empirical Analysis

4.1 分析対象データ

本研究では、以下のデータを対象に分析を実施した。なお、データは日経 NEEDS より取得した。

項　目	明　細
非倒産銘柄	証券取引所上場　3902 銘柄 （計算期間により対象銘柄数は異なる）
倒産銘柄	142 銘柄（法的倒産のみを対象とした）
計算期間	2000 年 1 月～2011 年 12 月末

4.2 ハースト指数の計算結果

まず、(14)式の関係から個別の株式銘柄に対してハースト指数を計算した結果の例を示す。図５はトヨタ自動車（株式コード 7203）を例として、2000 年 1 月～2011 年 12 月までの日次の株価データ（終値）を利用してハースト指数を求めた結果を示したグラフである。横軸には期間τ（日数）の対数、縦軸にはR/S値の対数である。傾きHは 0.5583 となった。なお、傾きHの推計値の 95%信頼区間は下限が 0.5497、上限が 0.5670 であることから、トヨタ自動車の株価変動のハースト指数は片側 5%水準で$H \neq 0.5$であるといえる。また、回帰直線のR^2値は 0.994 であり高いフィッティングを示している[10]。このことより、トヨタ自動車の株価推移は通常の幾何ブラウン運動よりも、長期の記憶効果を有するフラクタル幾何ブラウン運動の性質を持つことがわかる。

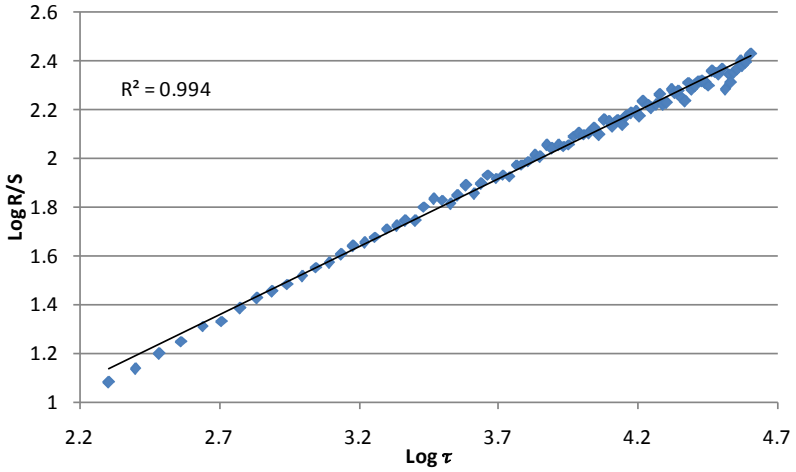

図５　ハースト指数の推計例（トヨタ自動車：株式コード 7203）

4.3 ハースト指数の分布

分析対象サンプル全銘柄に対して、(14)式を用いてハースト指数を計算した結果を図６に示す。なお、ハースト指数の計算には過去１年間の日次の株価の推移を利用して、各年度６月と１２月末における計算結果を表示している。全期間を通して中央値は 0.5

[10] なお、期間τが小さい領域では回帰曲線よりも計算値が若干低くなる傾向を示している。これは、期間τが小さい部分ではデータ数が少ないこともあり、$H < 0.72$の場合にはこのような傾向を有することが指摘されている。(Mandelbrot and Wallis, 1969)

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製（コピー）すると、著作権の侵害になります。

以上であり、四分位を示すボックスも概ね 0.5 以上であることからも、(12)式を利用することの一定の根拠となることがわかる。

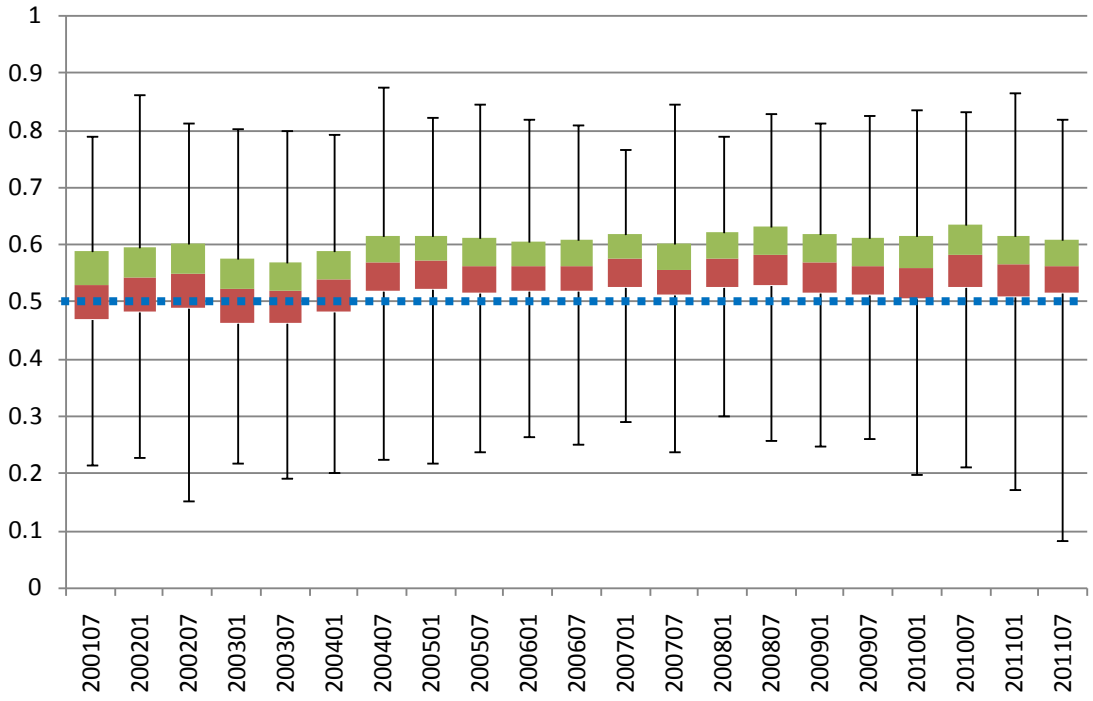

図6　対象全銘柄のハースト指数の時系列分布

4.4 Fractional Brownian Motion モデルと Ordinal Option Approach モデルによる結果の比較

図 7 では、個別銘柄毎に評価時点における過去 1 年分の日次株価の推移から推計したハースト指数 H を利用して(10)式より推計した倒産確率（以下FBMモデル）の中央値と、$H=1/2$ とした通常のオプションアプローチによる倒産確率（BSMモデル）の中央値の結果を比較した。あわせて、対象銘柄における各時点でのハースト指数の中央値も表示した。なお、評価時点は $T-t=2$ とし、ハースト指数は 0.5 を下限 [11]として計算した。FBMモデルの結果とBSMモデルによる結果は概ね同一の傾向を示している [12]が、FBMモデルから得られる倒産確率の方がBSMモデルによる結果と比較して、分析対象期間全体を通して若干高い傾向を示すことがわかる。図 6 で確認したとおりハースト指数は概ね 0.5 以上であることから、FBMモデルにより得られた結果はBSMモデルによる結果と比べて若干高い数値になったものと考えられる。

[11] H が 0.5 より小さい場合には 0.5 に置き換えて計算した。
[12] 両モデルによる倒産確率推移の相関係数（ピアソン）は 0.9969 と極めて高い。

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

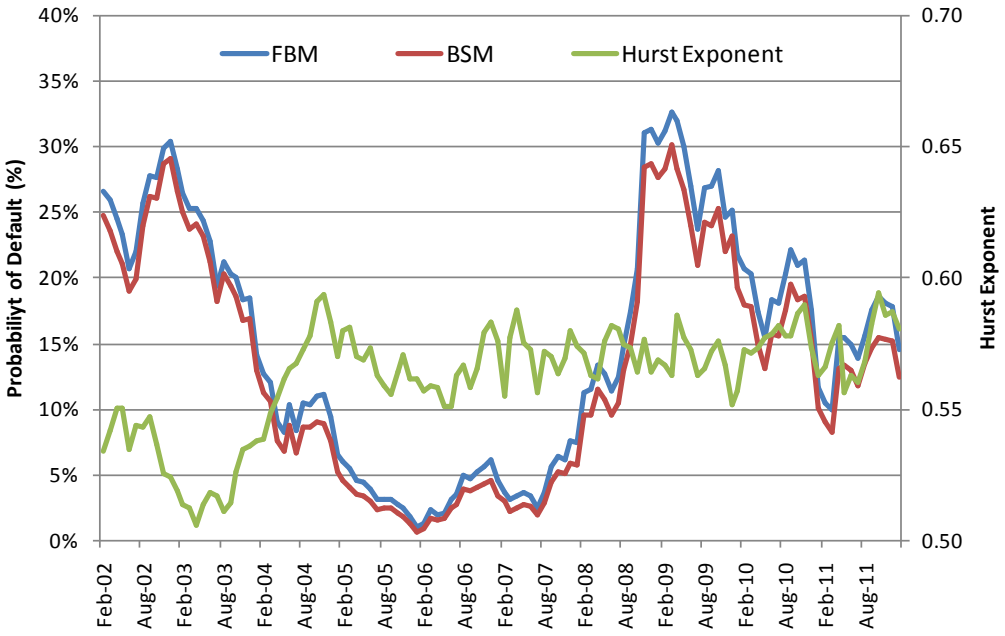

図7　FBM モデルと BSM モデルによる倒産確率の中央値比較およびハースト指数の推移

図８は FBM モデルと BSM モデルにより推計されたデフォルト確率をデフォルト確率別に７つのゾーンに分けてその構成比率を比較したグラフである。ゾーン別の構成比率は概ね同傾向を示しているものの、FBM モデルの方が全体的に若干水準は高いことがわかる。この傾向は市場全体の信用力が悪化している 2009 年 3 月の場合でも、市場全体の信用力が比較的高い（落ち着いている）2006 年 1 月の場合でも同じ傾向を示している。

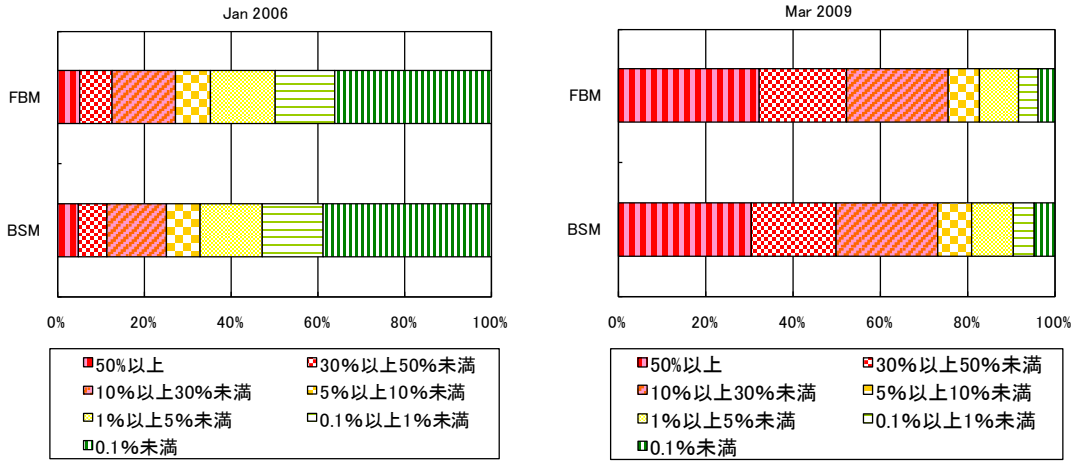

図8　FBM モデルと BSM モデルによる倒産確率の分布

4.5 デフォルト捕捉力の比較

実務的な観点ではデフォルト企業の捕捉力が高いモデルが望ましい。そこで、各倒産サンプルの倒産時点を基準に倒産サンプルの（全評価対象における一時点での）相対順位がどのような推移をたどるかを検証する。まず、図９は各倒産サンプルに対して倒産１ヶ月前の時点での倒産サンプルの（全評価対象における一時点での）相対順位（パーセント点）を横軸にとり、全倒産サンプル 91 銘柄に対して縦軸に累積表示したグラフ

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

である。

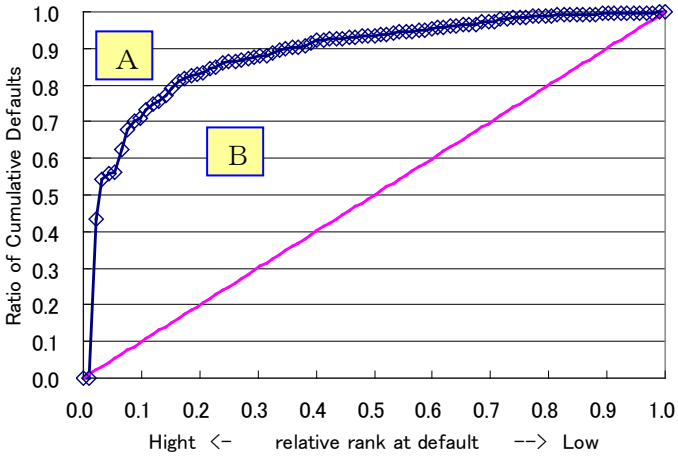

図9 FBM モデルによる倒産サンプルの捕捉力曲線

具体的には、ある倒産サンプルがある評価時点で全計測対象企業の中で倒産確率の高い方から 5%（良いい側から 95%）である場合、横軸 0.05 に一つの点をプロット（上乗せ）し、それを全ての倒産サンプルに対して繰り返して作成する。このとき，図１０に示すとおりカーブと 45 度線に囲まれた面積 B と 45 度線が作る三角形との比率を AUC とし

$$AUC = \frac{B}{A+B}$$

と定義する。もし、当該評価方法が完璧であれば推計される倒産確率は全サンプル中で最も高い（悪い）数値を示すはずである。すなわち，最も左側から順に（0.0 の地点）にプロットが積み重なることになるため、AUC=1 となる。一方、当該評価方法に説明力が全くない場合にはランダムサンプリングと同一となり 45 度線と一致することになる（AUC=0）。よって、AUC が 1 に近いほどその推計方法による倒産サンプルの捕捉能力が高いことを示している。

図１０は横軸に倒産までの月数をとり AUC の推移を資産価値の推計方法別に計算した結果である。倒産サンプルの捕捉力は倒産の約 20 ヶ月前より大きく上昇を始め倒産直前で最も高い値を示すことがわかる。すなわち、倒産時点に近づくにつれてデフォルト確率が上昇し、評価対象サンプル内での相対評価が悪化していく様子が読み取れる。

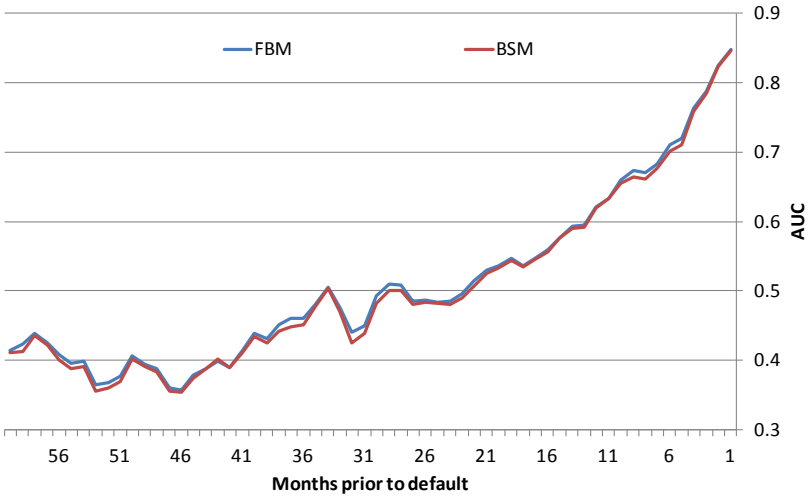

図10 FBM モデルによる倒産サンプルの捕捉力曲線（時系列推移）

株式会社 金融工学研究所 http://www.ftri.co.jp/ TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製（コピー）すると、著作権の侵害になります。

図１１はFBMモデルとBSMモデルによるAUCの差を時系列で比較したものである。最大で1%程度FBMモデルによるAUCがBSMモデルによるAUCを上回ることが読み取れる。なお、この60個のデータによる平均値の差の検定では$p<0.0001$で高度に有意な差を示していることも確認できる。

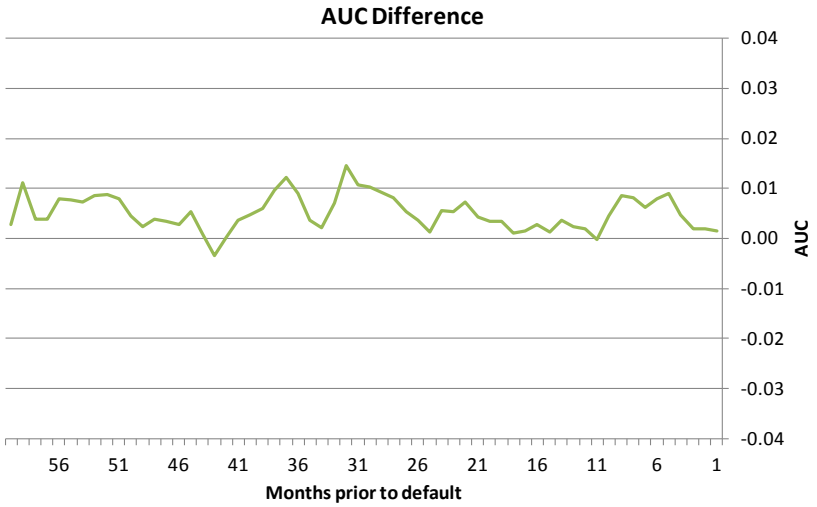

図11　FBMモデルによるAUCとBSMモデルによるAUCの差の推移

図１２は倒産銘柄を対象に、倒産日までの月数を横軸にとり、ハースト指数の平均値をプロットしたグラフである。倒産までの月数とハースト指数には有意な関係はなく、概ね0.58前後で推移する様子が見られる。

FBMモデルが有意にBSMモデルによる評価結果を上回るパフォーマンスを示したが、この理由の一つとして、非倒産銘柄のハースト指数の平均値 0.559 と比較して、倒産銘柄のハースト指数の平均値が 0.576 と高い値を示していることが理由の一つとして考えられる。なお、ハースト指数が結果に与える影響が大きいことから、今回採用した R/S 法以外を用いてハースト指数を計測すると異なった結論が得られる可能性もある。

今回の報告結果は、株価変動の情報やハースト指数を信用リスク分析に利用することの重要性を示すものであり、信用リスク評価モデルを改善する上で有用な情報となりえる。

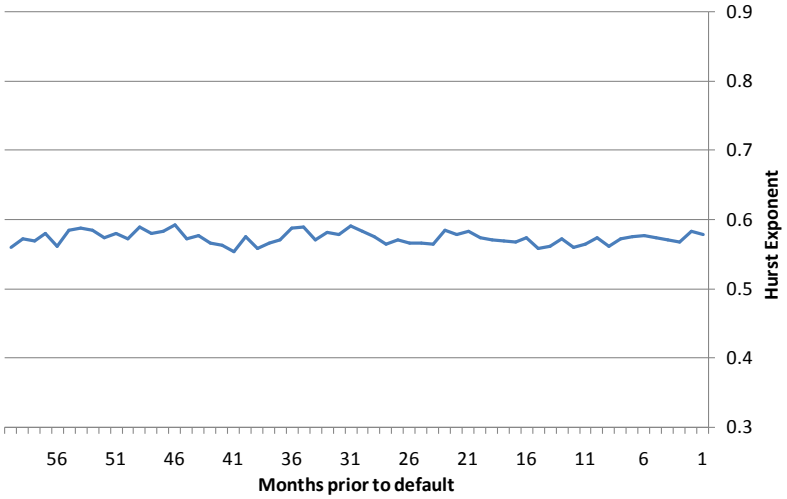

図12　デフォルト銘柄の倒産前のハースト指数の推移

株式会社 金融工学研究所　http://www.ftri.co.jp/　TEL: 03-3276-3440　FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。

5. Conclusion

このペーパーでは、通常のブラウン運動を拡張したフラクタルブラウン運動を利用したオプションアプローチで信用リスクを評価する新たなモデルを提案した。上場企業を対象にした分析の結果、通常のオプションアプローチによる評価結果と比較して、倒産確率はやや高めの数値を示すことがわかった。また、フラクタルブラウン運動を利用したモデルによる評価結果の方が、通常のブラウン運動を利用した評価結果と比べて倒産企業の捕捉力が高まることを示した。

今回計測されたハースト指数は 0.5～0.6 程度の数値を示し、株価の変動に持続性（persistent）を有する傾向を示すことがわかった。また、倒産企業のハースト指数はデフォルトに至るまでの期間（時間的な距離）には強い影響を受けず概ね 0.58 程度で推移することが分かった。これらの分析を通して、株価変動の情報を含むハースト指数は信用力をより適切に評価するために有用な情報となることを確認した。

6. References

Merton, Robert, “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” Journal of Finance 29, 449-470, (1974).

Hu, Yaozhong and Bernt Oksendal, “Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance,” Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol.6, No.1, pp1 – 32, (2003).

Mandelbrot, B.B., and Wallis, J.R., “Computer Experiments with Fractional Gaussian. Noises,” Water Resources Research, Vol.5, pp.228-267 (1969).

Necula, Ciprian, “Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment,” Working Paper, Academy of Economic Studies Bucharest, Romania, (2002)

Oshiro, Naoto and Yasufumi Saruwatari, “Credit Risk Evaluation through Stock Price Fluctuations and Their Correlations,” Proceedings of the First International Workshop of Intelligent Finance (IWIF1), pp. 58-73 (2004).

Oshiro, Naoto and Yasufumi Saruwatari, “Revisit on the Option Pricing Approach: Comparison of Method of Solutions – Stability and Accuracy,” Journal of Japan Industrial Management Association, Vol.57, No.5, pp413-427 (2006).

熊谷善彰、「金融時系列データのフラクタル分析」、多賀出版、2002

株式会社 金融工学研究所 http://www.ftri.co.jp/ TEL: 03-3276-3440 FAX: 03-3276-3439
〒103-0027 東京都中央区日本橋1-4-1 日本橋一丁目ビルディング
＊FTRI Research Memorandumを当社に無断で第三者に配布したり複写複製(コピー)すると、著作権の侵害になります。